11.1.9 Rovnice, nerovnice a jejich soustavy s parametrem

Předpoklady: 02080x

Př. 1: V čem se shoduje a v čem se liší řešení rovnic (nerovnic, soustav) s parametrem od řešení rovnic (nerovnic, soustav) bez parametru?

Shoda: Parametr zastupuje množinu konkrétních hodnot (čísel), které za něj můžeme dosazovat $\Rightarrow$ pře řešení postupujeme téměř stejným způsobem jako při řešení analogického problému bez parametru.
Rozdíl: Neznáme konkrétní hodnotu parametru $\Rightarrow$ při použití úprav, které není možné provést se všemi hodnotami, které je možné dosadit za parametr, musíme psát podmínky a větvit řešení.

Př. 2: Vyřeš rovnice.
a) $x(p-1)=p(2x+3)$ b) $p(xp-1)=2(2x+1)$

a) $x(p-1)=p(2x+3)$

$xp-x=2px+3p$

$-3p=px+x$

$x(p+1)=-3p$

Chceme vydělit rovnici výrazem $p+1$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou.

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

$p\neq-1 \Rightarrow$ můžeme vydělit: $x(p+1)=-3p \quad /:(p+1)$ $x=\dfrac{-3p}{p+1} \quad \Rightarrow \quad K=\left\{-\dfrac{3p}{p+1}\right\}$	$p=-1$ Nemůžeme vydělit, ale můžeme dosadit do rovnice před vydělením. $\Rightarrow$ $x(-1+1)=-3(-1)$ $0x=3$ $0=3 \quad \Rightarrow \quad K=\emptyset$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p\neq-1$	$K=\left\{-\dfrac{3p}{p+1}\right\}$
$p=-1$	$K=\emptyset$

b) $p(xp-1)=2(2x+1)$

$xp^2-p=4x+2$

$xp^2-4x=p+2$

$x(p^2-4)=p+2$

Chceme vydělit rovnici výrazem $p^2-4=(p+2)(p-2)$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou $\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou proto píšeme pod sebe).

$p\neq-2;2 \Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem p^2-4, protože se určitě nebude rovnat nule:

$x\left(p^2-4\right)=p+2 \quad /:\left(p^2-4\right)$

$x=\dfrac{p+2}{p^2-4}=\dfrac{p+2}{(p+2)(p-2)}=\dfrac{1}{p-2} \quad \Rightarrow \quad K=\left\{\dfrac{1}{p-2}\right\}$

$p=-2 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow x(p+2)(p-2)=p+2$

$x(-2+2)(-2-2)=-2+2$

$x\cdot 0=0 \quad \Rightarrow$ můžeme dosadit cokoliv $\Rightarrow K=R$

$p=2 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow x(p+2)(p-2)=p+2$

$x(2+2)(2-2)=2+2$

$x\cdot 0=4 \quad \Rightarrow$ nikdy nevyjde $\quad \Rightarrow K=\varnothing$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p\neq -2;2$	$K=\left\{\dfrac{1}{p-2}\right\}$
$p=-2$	$K=R$
$p=2$	$K=\varnothing$

Pedagogická poznámka: Více v hodinách 020801 - 020803.

Př. 3: Vyřeš nerovnice.
a) $px\geq x-1$ b) $px-2>2x-p$

a) $px\geq x-1$

$px-x\geq -1$

$x(p-1)\geq -1$

Chceme vydělit nerovnici výrazem $(p-1)$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou a záleží na znaménku $\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve**.

$p>1 \Rightarrow$ dělíme kladným číslem $\Rightarrow$ znak nerovnosti se nemění:

$x(p-1)\geq -1 \quad /:(p-1)$

$x\geq -\dfrac{1}{p-1} \quad \Rightarrow \quad K=\left\langle -\dfrac{1}{p-1};\infty\right)$

$p=1 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow x(p-1)\geq -1$

$x(1-1)\geq -1$

$x\cdot 0\geq -1 \quad \Rightarrow$ můžeme dosadit cokoliv $\Rightarrow K=R$

$p<1 \Rightarrow$ dělíme záporný číslem $\Rightarrow$ znak nerovnosti se obrací:

$x(p-1)\geq -1 \quad /:(p-1)$

$x\leq -\dfrac{1}{p-1} \quad \Rightarrow \quad K=\left(-\infty;-\dfrac{1}{p-1}\right\rangle$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*: **Řešení pro *x*:**

$p>1$	$K=\left\langle -\frac{1}{p-1};\infty\right)$
$p=1$	$K=R$
$p<1$	$K=\left(-\infty;-\frac{1}{p-1}\right\rangle$

b) $px-2>2x-p$

$px-2x>2-p$

$x(p-2)>2-p$

Chceme vydělit nerovnici výrazem $(p-2)$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou a záleží na znaménku $\Rightarrow$ **rozvětvení na tři větve**.

$p>2$ $\Rightarrow$ dělíme kladným číslem $\Rightarrow$ znak nerovnosti se nemění:

$x(p-2)>2-p \quad /:(p-2)$

$x>\frac{2-p}{p-2}=-1 \quad \Rightarrow \quad K=(-1;\infty)$

$p=2$ $\Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme $\Rightarrow$ $x(p-2)>2-p$

$x(2-2)>2-2$

$x\cdot 0>0 \qquad \Rightarrow \qquad$ nikdy nevyhovuje $\Rightarrow$ $K=\emptyset$

$p<2$ $\Rightarrow$ dělíme záporný číslem $\Rightarrow$ znak nerovnosti se obrací:

$x(p-2)>2-p \quad /:(p-2)$

$x<\frac{2-p}{p-2}=-1 \quad \Rightarrow \quad K=(-\infty;-1)$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p>2$	$K=(-1;\infty)$
$p=2$	$K=\emptyset$
$p<2$	$K=(-\infty;-1)$

Pedagogická poznámka: Více v hodině 020805.

Př. 4: Urči, kdy je řešením rovnice $\frac{2}{x}=\frac{p^2+1}{p}$ kladné číslo.

Podmínky: $p\neq 0$, $x\neq 0$

$\frac{2}{x}=\frac{p^2+1}{p} \quad /\cdot px$

$2p=x\left(p^2+1\right)$

Chceme dělit výrazem $\left(p^2+1\right)$, to můžeme vždy, protože je vždy nenulový.

$x = \frac{2p}{p^2+1}$

Zohlednění podmínek:

$p \neq 0 \Rightarrow$

$p = 0 \Rightarrow K = \emptyset$

$x \neq 0 \Rightarrow$ zjišťujeme, kdy platí $x = \frac{2p}{p^2+1} = 0$. Platí pouze v případě, že $p = 0$ (už je zohledněno v předchozím řádku).

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p = 0$	$K = \emptyset$
$p \neq 0$	$K = \left\{ \frac{2p}{p^2+1} \right\}$

Zjišťujeme, kdy je řešením kladné číslo.

$x = \frac{2p}{p^2+1} > 0 \Rightarrow 2p > 0 \Rightarrow p > 0$.

Kladné číslo je řešením rovnice pro hodnoty parametru $p \in (0;\infty)$.

Př. 5: Vyřeš rovnice.

a) $\frac{p-1}{p+2} = \frac{2x+1}{x-2}$ b) $x^2 - px + 1 = 0$

a) $\frac{p-1}{p+2} = \frac{2x+1}{x-2}$

Podmínky: $p \neq -2$, $x \neq 2$

$\frac{p-1}{p+2} = \frac{2x+1}{x-2} \quad / \cdot (p+2)(x-2)$

$(p-1)(x-2) = (2x+1)(p+2)$

$px - 2p - x + 2 = 2xp + 4x + p + 2$

$-3p = px + 5x$

$-3p = (p+5)x$

Chceme vydělit rovnici výrazem $p+5$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou.

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

$p \neq -5 \Rightarrow$ můžeme vydělit: $-3p = (p+5)x \quad / : (p+5)$ $x = \frac{-3p}{p+5}$	$p = -5$ Nemůžeme vydělit, ale můžeme dosadit do rovnice před vydělením. $\Rightarrow$ $-3 \cdot (-5) = (-5+5)x$ $15 = 0x$ $15 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \emptyset$

Zohlednění podmínek:

$p \neq -2 \Rightarrow p = -2 \Rightarrow K = \emptyset$

$x \neq 2$, hledáme, kterou hodnotu *p* musíme vyloučit: $x = \frac{-3p}{p+5} = 2$.

$-3p = 2(p+5)$
$-3p = 2p+10$
$-5p = 10$
$p = -2$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \neq -5; -2$	$K = \left\{ -\dfrac{3p}{p+5} \right\}$
$p = -5; -2$	$K = \emptyset$

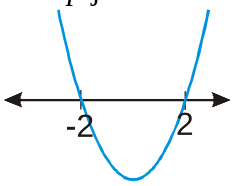
b) $x^2 - px + 1 = 0$

Dosadíme do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice.

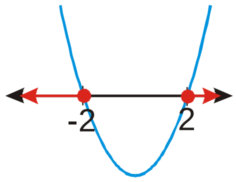
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-p) \pm \sqrt{(-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4}}{2}$$

Řešení rovnice závisí na znaménku čísla $\left(p^2 - 4\right)$ pod odmocninou $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $p^2 - 4 > 0$. Hledáme nulové body: $p^2 - 4 = (p-2)(p+2) > 0 \Rightarrow p = \pm 2$

Před p je kladné číslo – „ďolík“.



Hledáme body nad osou $x \Rightarrow$



$p \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

$p \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \Rightarrow$ pod odmocninou kladné číslo $\Rightarrow$ dva kořeny:

$$x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2} \qquad x_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}$$

$$K = \left\{ \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4}}{2} \right\}$$

$p = \pm 2 \Rightarrow$ pod odmocninou nula $\Rightarrow$ jeden dvojnásobný kořen

$$p = 2 \quad x_{1,2} = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = 1$$

$$p = -2 \quad x_{1,2} = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = -1$$

$p \in (-2, 2) \Rightarrow$ pod odmocninou záporné číslo $\Rightarrow$ žádný kořen $\Rightarrow K = \emptyset$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *t*:	**Řešení pro *x*:**
$p \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$	$K = \left\{ \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 - 4}}{2} \right\}$
$p = 2$	$K = \{1\}$
$p = -2$	$K = \{-1\}$

$p \in (-2, 2)$	$K = \emptyset$

Pedagogická poznámka: O kvadratických rovnicích s parametrem více v hodině 020807.

Př. 6: Je dána rovnice $x^2 - 6x + m = 0$. Určete $\boldsymbol{m}$ tak, aby $x_1 = 3 - i\sqrt{2}$, $m \in R$.

[11]

Př. 7: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{array}{l} 2x - y = p \\ x + py = 2 \end{array}$.

Řešíme dosazovací metodou.
Z druhé rovnice vyjádříme *x*: $x = 2 - py$ a dosadíme do první rovnice.

$2(2 - py) - y = p$

$4 - 2py - y = p$

$4 - p = 2py + y$

$4 - p = y(2p + 1)$

Chceme vydělit rovnici výrazem $2p + 1$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou.

$\Rightarrow$ **rozvětvení**

$p \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow$ můžeme vydělit:

$4 - p = y(2p + 1) \quad / : (2p + 1)$

$y = \frac{4 - p}{2p + 1}$

$x = 2 - py = 2 - p\frac{4 - p}{2p + 1} = \frac{4p + 2}{2p + 1} - \frac{4p - p^2}{2p + 1} = \frac{2 + p^2}{2p + 1}$

$\Rightarrow \quad K = \left\{ \left[\frac{2 + p^2}{2p + 1}; \frac{4 - p}{2p + 1} \right] \right\}$

$p = -\frac{1}{2}$

Nemůžeme vydělit, ale můžeme dosadit do rovnice před vydělením. $\Rightarrow$

$4 - \left(-\frac{1}{2}\right) = y\left[2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right]$

$\frac{9}{2} = 0 \cdot y \Rightarrow K = \emptyset$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru *p*:	**Řešení pro *x*:**
$p \neq -\frac{1}{2}$	$K = \left\{ \left[\frac{2 + p^2}{2p + 1}; \frac{4 - p}{2p + 1} \right] \right\}$
$p = -\frac{1}{2}$	$K = \emptyset$

Pedagogická poznámka: Více v hodině 020804.

Př. 8: Vyřeš rovnice.

a) $(a+1)x^2 + ax + |a| = 0$ b) $\sqrt{x^2 - p} = x - p$

Př. 9: Vyřeš nerovnice.

a) $px^2 - 2x + p \geq 0$ b) $|x - p| \leq 3$

Shrnutí: